Tratamiento de errores

1. Cifras significativas. Notación científica

Suponer que te preguntan tu altura en unidades SI y sabes que tu altura es 68 pulgadas en unidades Británicas. Usando una calculadora, podría convertir las 68 pulgadas multiplicándolas por 0.0254 m/pulgada y obtendrías como estimación de su altura 1.7272 m. De este modo pareces conocer tu altura con una precisión de 0.1 mm, esto es, con la precisión del espesor de una hoja de papel. Pocos de nosotros conocemos nuestra altura con esta precisión. A fin de no establecer demasiada precisión en su estimación, debes dar la estimación hecha en unidades SI, aproximadamente con la misma precisión con que diste tu altura en unidades Británicas: 1 parte en 68. Una respuesta de 1.7 m ó 1.73 m implica aproximadamente la misma precisión que 68 pulgadas y da aproximadamente la misma información. Este principio se aplica a cualquier medida: La precisión con que se conoce una cantidad debe estar reflejada en el número que se usa para representarla.

Una cifra significativa es un dígito del número que representa una cantidad. Siempre que no sea un cero inicial o final.

Los ceros finales cuentan si están después de un punto decimal. Por tanto 0'2547 tiene cuatro cifras significativas, al igual que 345'600. Más ejemplos son: 3'14 (tres cifras significativas), 0'003800 (cuatro cifras significativas), pi (3'1415926... conocido con más de un millón de cifras significativas) y 3'4560 • 10^5 (cinco cifras significativas).

La cifra significativa más a la derecha de un número se denomina el menor dígito significativo. Por ejemplo, el menor dígito significativo en 3'456 es el 6 y en 0'003800 es el cero de más a la derecha.

Las reglas de cifras significativas que usaremos son:

1. Cuando los números se multipliquen o dividan, el resultado tiene el mismo número de cifras significativas que tiene la cantidad dada con menor precisión.

Por ejemplo:

$$0{,}456s \cdot \frac{7{,}8m}{9{,}0123m} = 0{,}39s$$

2. Cuando se sume o se reste, hay que encontrar qué cantidad inicial posee el dígito significativo más a la izquierda respecto al punto decimal. El menor dígito significativo de la respuesta está en la misma posición con respecto al punto decimal. El menor dígito significativo de la respuesta está en la misma posición con respecto al punto decimal.

Por ejemplo, 8'5675 kg — 8'556 kg es igual a 0'011 kg, por tanto datos iniciales con cinco y cuatro cifras significativas pueden conducir a un resultado con sólo dos cifras significativas.

Por otra parte, 8'4 m + 3'2 m + 6'2 m — 1'1 m es igual a 16'7 m, la respuesta tiene una cifra significativa más que los datos de partida.

Si sumamos 0'032 s a 11'6 s, 0'032 s es menor que la incertidumbre en 11'6 s, la respuesta es 11'6 s.

3. El resultado de las funciones trascendentes, como el seno, el arcotangente o la función exponencial, tiene el mismo número de cifras significativas que el argumento. Por ejemplo, sen 35'4° = 0'579, sen 35° = 0'58, Ln 9'356 = 2'236, Ln 9'3 = 2'2, $e^{4'11}$ = 60'9, y exp 4 = 50.

Aunque las reglas de las cifras significativas introducidas aquí no poseen la sofisticación de la estadística, dan una idea de la precisión con que se conoce una respuesta. ¡Siguiendo ciegamente todo lo que la calculadora muestra en la pantalla, casi siempre realizará valoraciones carentes de sentido!

Las cifras significativas son aquellas que aportan información útil en un número. Las cifras no significativas son las que aparecen como resultados del cálculo. Se consideran cifras significativas aquellas que tienen igual o mayor peso que el error de un número. Por ejemplo, $T=296{,}346724\pm0{,}1K$ si tenemos la magnitud las cifras a partir de la centésima de kelvin (incluida ésta) no aportan nada nuevo, pues son de mucha menor magnitud que el error y entran dentro de las fluctuaciones. También se considera que los ceros no son cifras significativas, excepto cuando estén entre dos cifras distintas de cero. Por ejemplo 110 tiene dos cifras significativas,0,0001 tiene una cifra significativa, pero 102 tiene tres.

Esto se suele resolver empleando notación científica. En estos tres últimos casos, en notación científica escribimos $1{,}1\cdot10^2$, $1\cdot10^{-4}$ y $1{,}02\cdot10^2$. Como vemos el número de cifras significativas en notación científica es trivial.

Hay que hacer notar que la medida se tiene que dar hasta el peso del error. Supongamos que tenemos una medida d=30 cm con un error de un milímetro, en ese caso se debe escribir d=30,0±0,1 cm .

Redondeo de números

Por tanto, cuando tenemos cifras no significativas hay que eliminarlas, pero no simplemente borrándolas, sino redondeando. Es obvio que si tenemos que redondear 3,294438 a la primera cifra decimal es mucho más correcto escribir 3,3que 3,2. Generalmente se dan las siguientes reglas de redondeo:

Si la cifra que se omite es menor que 5, la eliminación se realiza sin más.

Si la cifra que se omite es mayor que 5, se aumenta en una unidad la última cifra que se conserva.

Si la cifra que se omite es 5 se elimina si la última cifra retenida es par y se suma uno a la última cifra retenida si es impar.

Por supuesto, en el último punto también existe el convenio contrario. Estadísticamente son equivalentes.

2. Reglas para expresar una medida y su error

Toda medida debe de ir seguida por la unidad, obligatoriamente del Sistema Internacional de Unidades de medida.

Cuando un físico mide algo debe tener gran cuidado para no producir una perturbación en el sistema que está bajo observación. Por ejemplo, cuando medimos la temperatura de un cuerpo, lo ponemos en contacto con un termómetro. Pero cuando los ponemos juntos, algo de energía o "calor" se intercambia entre el cuerpo y el termómetro, dando como resultado un pequeño cambio en la temperatura del cuerpo que deseamos medir. Así, el instrumento de medida afecta de algún modo a la cantidad que deseábamos medir

Además, todas las medidas están afectadas en algún grado por un error experimental debido a las imperfecciones inevitables del instrumento de medida, o las limitaciones impuestas por nuestros sentidos que deben de registrar la información.

1.- Todo resultado experimental o medida hecha en el laboratorio debe de ir acompañada del valor estimado del error de la medida y a continuación, las unidades empleadas.

Por ejemplo, al medir una cierta distancia hemos obtenido 297±2 mm.

De este modo, entendemos que la medida de dicha magnitud está en alguna parte entre 295 mm y 299 mm. En realidad, la expresión anterior no significa que se está *seguro* de que el valor verdadero esté entre los límites indicados, sino que hay cierta *probabilidad* de que esté ahí.

Una medida de una velocidad expresada de la forma 6051’78±30 m/s es completamente ridícula, ya que la cifra de las centenas puede ser tan pequeña como 2 o tan grande como 8. Las cifras que vienen a continuación 1, 7 y 8 carecen de significado y deben de ser redondeadas. La expresión correcta es 6050±30 m/s

Una medida de 92’81 con un error de 0’3, se expresa 92’8±0’3

Con un error de 3 se expresa 93±3

Con un error de 30 se expresa 90±30

2.- Los errores se deben dar solamente con una única cifra significativa. Únicamente, en casos excepcionales, se pueden dar una cifra y media (la segunda cifra 5 ó 0).

3.- La última cifra significativa en el valor de una magnitud física y en su error, expresados en las mismas unidades, deben de corresponder al mismo orden de magnitud (centenas, decenas, unidades, décimas, centésimas).

Expresiones incorrectas por la regla 2

24567±2928 m

23’463±0’165 cm

345’20±3’10 mm

Expresiones incorrectas por la regla 3.

24567±3000 cm

43±0.06 m

345’2±3 m

Expresiones correctas

24000±3000 m
23’5±0’2 cm
345±3 m
43’00±0’06 m

Medidas directas

Un experimentador que haga la misma medida varias veces no obtendrá, en general, el mismo resultado, no sólo por causas imponderables como variaciones imprevistas de las condiciones de medida: temperatura, presión, humedad, etc., sino también, por las variaciones en las condiciones de observación del experimentador.

Si al tratar de determinar una magnitud por medida directa realizamos varias medidas con el fin de corregir los errores aleatorios, los resultados obtenidos son x_1, x_2, ... x_n se adopta como mejor estimación del valor verdadero, el valor medio $\overline{x}$, que viene dado por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_n}{n} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

El valor medio, se aproximará tanto más al valor verdadero de la magnitud cuanto mayor sea el número de medidas, ya que los errores aleatorios de cada medida se va compensando unos con otros. Sin embargo, en la práctica, no debe pasarse de un cierto número de medidas. En general, es suficiente con 10, e incluso podría bastar 4 ó 5.

Cuando la sensibilidad del método o de los aparatos utilizados es pequeña comparada con la magnitud de los errores aleatorios, puede ocurrir que la repetición de la medida nos lleve siempre al mismo resultado; en este caso, está claro que el valor medio coincidirá con el valor medido en una sola medida, y no se obtiene nada nuevo en la repetición de la medida y del cálculo del valor medio, por lo que solamente será necesario en este caso hacer una sola medida.

De acuerdo con la teoría de Gauss de los errores, que supone que estos se producen por causas aleatorias, se toma como la mejor estimación del error, el llamado error cuadrático definido por:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

cuando el número de medidas sean elevadas,
si no se empleará la desviación típica

$$\Delta x = \frac{\sqrt{\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2}}{n}$$

El resultado del experimento se expresa como $\overline{x} \pm \Delta x$ y la unidad de medida.

4.- La identificación del error de un valor experimental con el error cuadrático obtenido de *n* medidas directas consecutivas, solamente es válido en el caso de que el error cuadrático sea mayor que el error instrumental, es decir, que aquél que viene definido por la resolución del aparato de medida.

Es evidente, por ejemplo, tomando el caso más extremo, que si el resultado de las *n* medidas ha sido el mismo, el error cuadrático, de acuerdo con la formula será cero, pero eso no quiere decir que el error de la medida sea nulo. Si no, que el error instrumental es tan grande, que no permite observar diferencias entre las diferentes medidas, y por tanto, el error instrumental será el error de la medida.

Ejemplos:

Si al hacer una medida de la intensidad con un amperímetro cuya división o cifra significativa más pequeña es 0'01 A, la lectura es 0'64 A, y esta lectura es constante (no se observan variaciones al medir en diferentes instantes), tomaremos 0'64 como el valor de la medida y 0'01 A como su error. La medida se expresará así

0'64±0'01 A

Supongamos que hemos medido un determinado tiempo, *t*, cuatro veces, y disponemos de un cronómetro que permite conocer hasta las décimas de segundo. Los resultados han sido: 6,3 6,2 6,4 y 6,2 s. De acuerdo a lo dicho anteriormente, tomaremos como valor medido el valor medio:

$$\overline{x} = \frac{6{,}3 + 6{,}2 + 6{,}4 + 6{,}2}{4} = 6{,}275s$$

El error cuadrático será:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{(6'3 - 6'275)^2 + (6'2 - 6'275)^2 + (6'4 - 6'275)^2 + (6'2 - 6'275)}{4 \cdot 3}} = 0'04787$$

Este error se expresa con una sola cifra significativa, (regla 2), Δt=0'05 s. Pero el error cuadrático es menor que el error instrumental, que es 0'1 s, por lo que debemos tomar este último como el error de la medida, y redondear en consecuencia el valor medio, (regla 3) por lo que el resultado final de la medida es: t=6'3±0'1 s

Consideremos un ejemplo similar al anterior, pero en que los valores obtenidos para el tiempo están más dispersos: 5'5, 5'7, 6'2 y 6'5 s. Se encuentra que el valor medio es 5'975, y el error cuadrático 0'2286737. El error cuadrático es en esta caso mayor que el error instrumental, por lo que debemos tomarlo como el error de la medida. Siguiendo la regla 2, lo debemos redondear a 0.2 (una sola cifra significativa). Y de acuerdo con la regla 3 (la medida y el error con el mismo número de decimales), expresamos la medida finalmente como: t=6'0±0'2 s

Error absoluto y error relativo

Los errores de los que hemos estado hablando hasta ahora son los errores absolutos. El error relativo se define como el cociente entre el error absoluto y el valor medio. Es decir

$$e_r = \frac{\Delta x}{\overline{x}}$$

donde $\overline{x}$ se toma en valor absoluto, de forma que e_r es siempre positivo.

El error relativo es un índice de la precisión de la medida. Es normal que la medida directa o indirecta de una magnitud física con aparatos convencionales tenga un error relativo del orden del uno por ciento o mayor. Errores relativos menores son posibles, pero no son normales en un laboratorio escolar.

Medidas indirectas

En muchos casos, el valor experimental de una magnitud se obtiene, de acuerdo a una determinada expresión matemática, a partir de la medida de otras magnitudes de las que depende. Se trata de conocer el error en la magnitud derivada a partir de los errores de las magnitudes medidas directamente.

Funciones de una sola variable

Un ejemplo importante y frecuente en el laboratorio sobre las medidas indirectas es el siguiente:

Supongamos que queremos medir el periodo *P* de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa, y disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0.1 s. Medimos el tiempo que tarda en hacer 10 oscilaciones, por ejemplo 4.6 s, dividiendo este tiempo entre 10 resulta *P*=0.46 s, que es el periodo "medio".

$$P = \frac{t}{10} \qquad \Delta P = \frac{\Delta t}{10}$$

Obtenemos para el error ΔP=0'01 s. Por tanto, la medida la podemos expresar como: P=0'46±0'01 s. Es evidente, que podemos aumentar indefinidamente la resolución instrumental para medir *P* aumentando el número de periodos que incluimos en la medida directa de *t*. El límite está en nuestra paciencia y la creciente probabilidad de cometer errores cuando contamos el número de oscilaciones. Por otra parte, el oscilador no se mantiene con la misma amplitud indefinidamente, sino que se para al cabo de un cierto tiempo.

Función de varias variables

La magnitud *y* viene determinada por la medida de varias magnitudes *p, q, r*, etc., con la que está ligada por la función
$y=f(p, q, r \ldots)$.
El error de la magnitud *y* viene dado por la siguiente expresión. (derivadas parciales se estudian en cursos más altos)

$$\Delta y=\sqrt{\left(<\frac{\partial f}{\partial p}>\Delta p\right)^2+\left(<\frac{\partial f}{\partial q}>\Delta q\right)^2+\left(<\frac{\partial f}{\partial r}>\Delta r\right)^2+\ldots}$$

Casos más frecuentes

$$z=x+y \qquad \Delta z=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$z=x-y \qquad \Delta z=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$z=x\cdot y \qquad \frac{\Delta z}{z}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

$$z=\frac{x}{y} \qquad \frac{\Delta z}{z}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

La medida de los lados de un rectángulo son 1.53±0.06 cm, y 10.2±0.1 cm, respectivamente. Hallar el área del rectángulo y el error de la medida indirecta.
El área es $z=1.53\times10.2=15.606$ cm^2
El error relativo del área $\Delta z/z$ se obtiene aplicando la fórmula del producto de dos magnitudes.

$$\frac{\Delta z}{z}=\sqrt{\left(\frac{0.06}{1.53}\right)^2+\left(\frac{0.1}{10.2}\right)^2}=0.0404422504$$

$$\Delta z=(1.53\cdot 10.2)\cdot 0.0404422504=0.63083$$

El error absoluto con una sola cifra significativa es 0.6. De acuerdo con la regla 3, la medida del área junto con el error y la unidad se escribirá como
15.6±0.6 cm^2
Funciones de dos variables
Queremos calcular la aceleración de la gravedad *g*, midiendo el periodo *P* de un péndulo de longitud *l*
El periodo de un péndulo

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad g=4\pi^2\frac{l}{P^2}$$

La expresión del error Δg de la variable dependiente *g*

$$\Delta g=\sqrt{\left(4\pi^2\frac{1}{P^2}\Delta l\right)^2+\left(4\pi^2\frac{-2}{P^3}\Delta P\right)^2}=4\pi^2\frac{l}{P^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2+\left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta g}{g}=\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2+\left(\frac{2\Delta P}{P}\right)^2}$$

Supongamos que medimos el periodo *P* y la longitud *l* del péndulo
$P=1.396\pm0.004$ s
$l=92.95\pm0.1$ cm
Calculamos la aceleración de la gravedad y el error
$g=979.035$ cm/s^2
$\Delta g=4.28$
Expresamos correctamente la medida y el error de *g*
979±4 cm/s^2

3 Ajuste a una recta

En ocasiones querremos representar los datos que tenemos y hallar la función que describe su comportamiento. Cuando esta función es una recta de la forma y=ax + b se emplea el Método de los Mínimos Cuadrados, que nos da el valor de los coeficientes a y b con su error, de este modo:

$$a = \frac{n\sum x_i yi - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\ , \qquad (1)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\ . \ (2)$$

Para medir la calidad de este ajuste, es decir, si los datos están más o menos cerca de los valores teóricos que nos da la recta calculada, se emplea el coeficiente de correlación, que está acotado entre -1 y 1. Este coeficiente es tanto mejor cuanto más se acerque a alguno de estos valores y peor cuanto más se acerque a cero. La fórmula de coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}\ .$$

Nosotros usaremos una hoja de cálculo de Microsoft o de Open office, se explicará en el aula.